

文章编号: 1000-8055(2022)04-0886-11

doi: 10.13224/j.cnki.jasp.20210164

超声速平板边界层中流向涡的生成条件

王 乾, 黄章峰

(天津大学 机械工程学院 力学系, 天津 300072)

摘 要: 针对马赫数为 4.5 的超声速平板边界层, 基于线性稳定性理论(LST)选取初始扰动组合, 通过直接数值模拟(DNS), 计算了第一模态不稳定波扰动组合沿流向演化生成流向涡的过程。采用改进 Omega-Liutex 旋涡识别方法进行涡识别, 结合流向不同位置截面的流线图, 分析了流向涡的生成特性。根据流向涡在 zy 截面内的流线特征, 提出了流向涡的生成条件, 研究发现: 流向涡可以直接通过一对展向对称的第一模态不稳定斜波扰动与基本流叠加得到, 不是必须经过非线性作用。

关 键 词: 超声速平板; 边界层; 线性稳定性理论; 流向涡; 直接数值模拟;
改进 Omega-Liutex 旋涡识别法

中图分类号: V211.3

文献标志码: A

Generation conditions of streamwise vortex in supersonic flat-plate boundary layer

WANG Qian, HUANG Zhangfeng

(Department of Mechanics,

School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: The initial disturbance combinations were selected based on the linear stability theory (LST) for a supersonic flat-plate boundary layer with Mach number of 4.5. Through direct numerical simulation (DNS), the generation process of streamwise vortex due to the evolution of combined first-mode unstable waves along the flow direction was simulated. Based on the vortex identification method of modified Omega-Liutex and the streamline diagram at different positions in the streamwise direction, the generation characteristics of streamwise vortex were analyzed, and its generation conditions were proposed according to the features of streamline in zy plane. It was found that streamwise vortex can be obtained directly by superimposing a pair of first-mode unstable oblique waves and basic flow, in which nonlinear action was not necessary.

Key words: supersonic flat-plate; boundary layer; linear stability theory;
streamwise vortex; direct numerical simulation;
modified Omega-Liutex vortex identification method

收稿日期: 2021-04-10

基金项目: 国家自然科学基金(12072232); 国家重大项目(GJXM92579)

作者简介: 王乾(1995—), 男, 硕士生, 主要从事流动稳定性研究。

通信作者: 黄章峰(1977—), 男, 教授, 博士, 主要从事流动稳定性、转捩及湍流、直接数值模拟方向的研究。E-mail: hzf@tju.edu.cn

引用格式: 王乾, 黄章峰. 超声速平板边界层中流向涡的生成条件[J]. 航空动力学报, 2022, 37(4): 886-896. WANG Qian, HUANG Zhangfeng. Generation conditions of streamwise vortex in supersonic flat-plate boundary layer[J]. Journal of Aerospace Power, 2022, 37(4): 886-896.

由于层流与湍流在气动力热性质上存在巨大差异,流动从层流到湍流的转捩过程一直是流体力学的重要研究对象^[1]。边界层的自然转捩过程大致可分为4个阶段:小扰动产生的感受性阶段、扰动的线性增长阶段、扰动的非线性增长阶段、湍流阶段。一般认为,流向涡产生于扰动非线性增长阶段,并对湍流的出现起重要作用^[2]。

早期关于流向涡的研究多采用实验手段。Head和Bandyopadhyay^[3]通过流动显示技术,发现雷诺数会影响湍流边界层内的结构,高雷诺数下($Re_\theta > 2\,000$,特征长度 θ 为边界层动量厚度)边界层会存在拉长的流向发卡涡或旋涡对,而在低雷诺数下($Re_\theta < 800$),大尺度结构仅由孤立的涡环组成。Acarlar和Smith^[4-5]用流动显示技术和热膜风速仪测量技术,证实发卡涡对近壁面湍流产生起重要作用。Lian^[6]用氢气泡测量技术研究有逆压梯度湍流边界层的相干结构时,在近壁面低速条带与高速条带的交界区观察到了流向涡。

随着计算机性能的飞速提高,有关流向涡的数值研究也层出不穷。

Rogers和Moin^[7]通过DNS求解非定常不可压缩Navier-Stokes(N-S)方程,模拟了均匀剪切湍流,再现了发卡涡结构。Jeong等^[8]用条件采样的方法对槽道流近壁区相干涡结构进行研究,发现近壁区起主导作用的相干结构被拉伸为准流向涡结构,但在近壁区并没有发现发卡涡结构。周恒等^[9]提出了湍流边界层近壁区单个相干结构的理论模型,通过数值模拟研究了相干结构的演化历程,并通过与实验结果的对比论证了其合理性。Zhou等^[10]用DNS对低雷诺数下槽道湍流流场中单一发卡涡结构的演化进行了研究,发现在发卡涡腿部侧面会产生准流向涡。Schoppa和Hussain^[11]针对槽道湍流提出一种近壁区流向涡的生成机理,即条带瞬态增长(STG)机制,认为流向涡可由多个稳定条带产生。他们将流向涡的产生描述为:①扰动的瞬态增长导致了流向涡 ω_x 涡面的形成;②当瞬态增长达到非线性幅值时,弯曲的条纹波增长进而产生 $\partial u/\partial x$;③通过 $\partial u/\partial x$ 的拉伸, ω_x 涡面破碎形成流向涡。

Pirozzoli等^[12]基于三维非定常可压缩N-S方程,对马赫数为2的超声速边界层进行DNS计算,发现可压缩边界层中的相干涡结构与不可压缩边界层有着结构上的相似性。陈林等^[13]对入口处添加Tollmien-Schlichting(T-S)波、马赫数为

0.5的平板边界层进行DNS计算,分析了次生流向涡的生成过程:涡管的小弯曲因近壁区的高剪切力被拉伸加强,形成底层主流向涡对;由于壁面无滑移的速度边界条件,主流向涡在壁面处诱导形成负涡量,当主流向涡中心与外部区域的压力梯度导致流动的方向发生改变时,负涡量从壁面上分离,形成次生流向涡。同时发现了次生流向涡和主流向涡共同作用形成环状涡的新机理。Sayadi等^[14]对马赫数为0.2的可压缩平板边界层进行了DNS计算,通过对两种扰动组合的模拟,证实了K型与H型转捩模式的存在,在两种模式均得到了与实验相符的 Λ 涡形式,同时发现这两种转捩模式在转捩后期具有相似的结构。Zhao等^[15]通过DNS研究了普朗特数为7的自然对流边界层中的K型和H型转捩,结果表明,在K型转捩边界层中存在三层纵向涡结构,而在H型转捩边界层中只存在双层纵向涡结构。李玲玉和刘建新^[16]在研究基频二次失稳条纹结构稳定性的过程中,发现首次失稳扰动幅值较大时,其主要成分为流向涡。

总体上看,尽管人们已经开展了很多有关流向涡的实验与数值研究,并在一定程度上揭示了流向涡的生成演化规律,但流向涡的生成问题至今仍未得到彻底解决。关于流向涡如何生成的问题,现有的研究普遍是通过扰动的非线性作用产生流向涡的。于是本文提出问题:能否通过线性叠加得到流向涡结构?

针对这一问题,本文基于三维非定常可压缩N-S方程,采用第一模态不稳定扰动组合叠加的方式在计算域入口引入扰动,通过DNS计算分析了超声速平板边界层中流向涡生成的过程,提出了流向涡生成的条件,并根据该条件,通过一对展向对称的第一模态斜波扰动与基本流线性叠加的方式得到了流向涡结构。

1 模型与计算方法

1.1 物理模型与网格

本文参考Huang等^[17]的基本流工况,选取马赫数为4.5的超声速平板绕流为物理模型,来流参数选取30 km高空的大气参数,即来流温度为226.5 K,单位雷诺数为 $1.7 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$ 。选取距离平板前缘2.25 m处为计算域入口,根据相似性解,此处边界层位移厚度为 $\delta = 0.01 \text{ m}$,以 δ 为特征长度对长度相关物理量进行无量纲化,以来流

参数对速度、密度、温度等物理量进行无量纲化。

DNS 计算域如图 1 所示,其中 Domain 与 Fringe 所示长方体区域分别为计算域与嵌边区, L_x 、 L_y 、 L_z 分别表示计算域在流向(x)、法向(y)、展向(z)的长度, x_0 表示计算域入口到板前缘的距离, Δf 为嵌边区的长度。计算域在 x 和 z 方向采用均匀网格,确保扰动波在每个波长内至少有 32

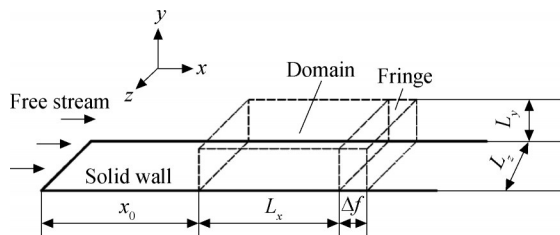


图 1 DNS 计算域示意图

Fig.1 Computational domain diagram of DNS

表 2 初始扰动参数

Table 2 Initial disturbance parameters

工况	A_0	ω	β	α_r	α_i
1	0.01	0.2	± 1.0	0.252 437 27	-0.009 537 51
2	0.01	0.2	0	0.251 022 88	-0.000 609 11
	0.01	0.2	± 1.0	0.252 437 27	-0.009 537 51

为了说明网格无关性,图 2 给出了工况 1 下的扰动速度 u' 在不同网格下的计算结果对比。图

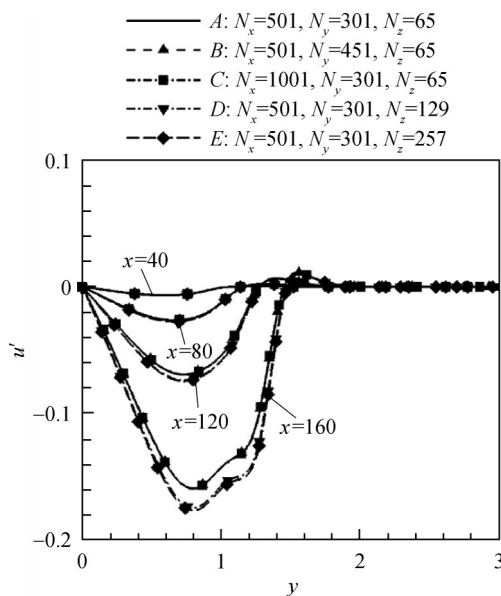


图 2 不同网格下的扰动速度 u' 在 $x=40, 80, 120, 160$, $z=0.25\lambda_z$ 处的法向分布

Fig.2 Normal-wise distribution of disturbance velocity u' at $x=40, 80, 120, 160$, $z=0.25\lambda_z$ under different grids

个点,在 y 方向采用非均匀网格,确保 1 个边界层位移厚度内有 150 个点。

详细网格参数见表 1,其中 N_x 、 N_y 、 N_z 分别表示 x 、 y 、 z 方向的网格点数, dy_1 表示近壁面第一层网格点到壁面的距离, dx 与 dz 分别表示 x 与 z 方向的网格间距。

表 1 DNS 网格参数

Table 1 Grid parameters of DNS

$L_x \times L_y \times L_z$	$N_x \times N_y \times N_z$	dy_1	dx	dz	Δf
$201 \times 30 \times 2\pi$	$501 \times 301 \times 129$	0.004 38	0.4	$\pi/64$	40

表 2 列出了各工况的初始扰动参数,其中 A_0 表示初始幅值, ω 表示频率, β 表示展向波数, α_r 与 α_i 分别为流向波数的实部与虚部。

中的 5 种网格在 x 、 y 、 z 方向的分布规律一致,只是网格点数不同。其中 B、C 相比 A,分别改变了 N_y 与 N_x ,其结果重合,说明 $N_x=501$ 与 $N_y=301$ 可以满足精度要求。D、E 相比 A,改变了 N_z ,其结果为 D 与 A 存在一定差别,D 与 E 重合,说明 $N_z=65$ 会带来一定误差,而 $N_z=129$ 可以充分满足精度要求。因此, $N_x=501$ 、 $N_y=301$ 、 $N_z=129$ 的配置可满足网格无关性要求。

1.2 控制方程与数值方法

本文在进行计算时,首先通过二维可压缩边界层方程的 Blasius 相似性解得到二维基本流

$$\varphi_0 = (\rho_0, u_0, v_0, 0, T_0) \quad (1)$$

然后将小扰动写成行进波的形式

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{2} \hat{\varphi}(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} + \text{c.c.} \quad (2)$$

其中 $\tilde{\varphi} = (\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{T})$, $\hat{\varphi} = (\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{T})$, c. c. 表示共轭项。

基于 Orr-Sommerfeld 方程对二维基本流进行线性稳定性分析,从而选取合适的扰动组合作为初始扰动。将二维基本流沿展向复制,得到三维基本流。然后固定三维基本流,针对扰动量进

行DNS计算,计算扰动的演化过程。

在进行扰动演化的DNS计算时,控制方程采用守恒型三维可压缩N-S扰动方程

$$\frac{\partial U'}{\partial t} + \frac{\partial E'}{\partial x} + \frac{\partial F'}{\partial y} + \frac{\partial G'}{\partial z} = \frac{\partial E'_v}{\partial x} + \frac{\partial F'_v}{\partial y} + \frac{\partial G'_v}{\partial z} \quad (3)$$

数值离散时,时间上采用2阶Runge-Kutta格式,空间上采用4阶中心差分格式离散黏性项,采用3阶迎风格式离散对流项。处理边界条件时,在壁面处采用无滑移绝热边界,展向采用周期边界,入口引入扰动,出口设置嵌边区。

1.3 涡识别判据

人们对涡现象的认识可追溯到几千年前,但对于涡的定义,至今还没有一个明确且统一的表述。在进行有关涡的研究时,人们通常会采用一定的判据对通过实验测量或计算模拟得到的结果进行涡识别,从而得到一些可视化的“涡结构”。

常见的涡识别判据有:涡量 ω 判据, λ_2 判据^[18], Q 准则^[19], Ω 方法^[20],Liutex矢量^[21]等。本文选用改进Omega-Liutex方法^[22]以及 zy 截面流线图对流向涡的存在进行了综合判断。

改进Omega-Liutex方法通过标量 $\tilde{\Omega}_L$ 衡量三维涡的存在性,其定义为

$$\tilde{\Omega}_L = \frac{(\omega \cdot r)^2}{2[(\omega \cdot r)^2 - 2\lambda_{ci}^2 + 2\lambda_{cr}^2 + \lambda_r^2] + \epsilon} \quad (4)$$

其中 ω 为涡量, λ_r 与 r 分别为速度梯度张量的实特征值与实特征向量, λ_{cr} 与 λ_{ci} 分别为速度梯度张量共轭复特征值的实部和虚部, ϵ 为一小量。

改进Omega-Liutex方法结合了Liutex矢量与 Ω 方法的思想,具有良好的旋涡识别效果和对阈值不敏感的特性,因而本文采用了此方法进行涡识别。 zy 截面流线图显示的是流向站位的流动情况,可用于判断截面内是否存在旋转流动。

2 计算结果与分析

2.1 流向涡的生成过程

在计算域入口引入的初始扰动组合,在三维扰动方程的控制下向下游传播,经过20个周期后流场收敛。图3给出了在 $t=20T$ (T 表示扰动周期)时刻工况1与工况2的瞬时速度场的 $\tilde{\Omega}_L$ 等值面(采用推荐阈值 $\tilde{\Omega}_L=0.52$)以及相应的无量纲流向速度 u 云图。

两种工况的识别结果十分相似,均为周期性成对出现的流向细长结构,为了验证所得涡结构

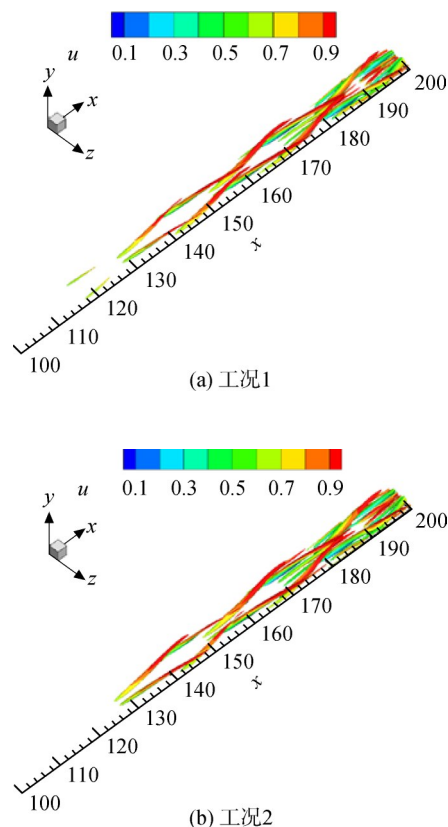


图3 $t=20T$ 时刻流场的 $\tilde{\Omega}_L=0.52$ 等值面及其速度 u 云图

Fig.3 Contour of velocity u on the iso-surface of $\tilde{\Omega}_L=0.52$ at $t=20T$ flow field

为流向涡,通常取不同流向位置 zy 截面的速度矢量图或流线图进行进一步判断。图4给出了两种工况下 $t=20T$ 时刻部分流向位置的结果,证实了该结构为流向涡,同时定性反映了流向涡的生成过程。流向涡的出现与法向扰动速度在展向的波动有关,当扰动速度的法向分量在展向的波动作用于基本流,导致流场内部出现了若干个满足 $v=w=0$ 的点时,若这些点中存在焦点,则该点附近会出现旋转流动,该点就是旋转流动的中心。

以图4(a)为例,一对流向涡出现于 $x=130$ 处展向对称轴 $z/\lambda_z=0.5$ 两侧,涡核为一对稳定焦点(图中白色圆点 F_1 、 F_2),而 $z/\lambda_z=0.5$ 处满足 $v=w=0$ 的点为鞍点(图中黑色圆点 S),故该处无旋转流动。随着扰动幅值沿流向增长,流向涡对之间向下的流动加剧,导致流向涡结构的能量增加,尺度也随之扩大,同时涡核位置在壁面的排挤下抬升,如图5(a)所示,而涡核 F_1 与 F_2 之间的距离也在不断增加,如图5(b)所示。当流向涡尺度扩大到一定规模,在原有流向涡对的外侧出现了次生流向涡对(涡核位于白色圆点 F_3 、 F_4),这是由于

原流向涡对外侧的向上流动不断增强,而瞬时流在 $z/\lambda_z=0$ 或 $z/\lambda_z=1$ 处向下的流动也随着扰动幅值增加而增强,两者与原流向涡对间存在的剪切力越来越强,最终导致了一对次生流向涡在原流向涡对的两侧出现。图 4(b) 给出了工况 2 的结果,从中可以看到与图 4(a) 类似的流向涡生成演化过程,不同的是在出现了次生流向涡的 $x=134$ 位置,前者在 F_3 、 F_4 处存在明显的极限环,而后者不存在极限环。

为进一步描述主流向涡演化生成次生流向涡的过程,将图 4 中次生流向涡出现位置 ($x=134$)

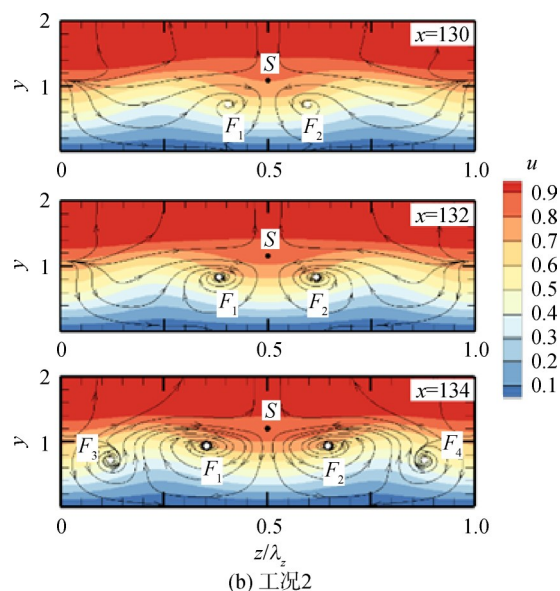
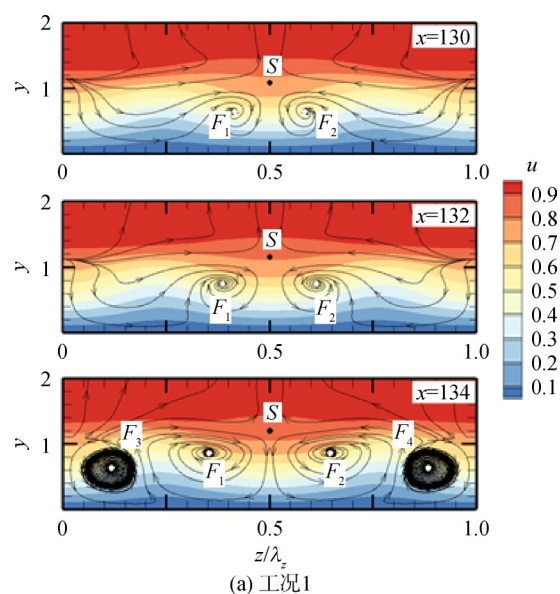


图 4 $t=20T$ 时刻不同流向位置的流线与速度 u 云图
Fig.4 Streamlines and contour u of different locations in the streamwise direction at $t=20T$

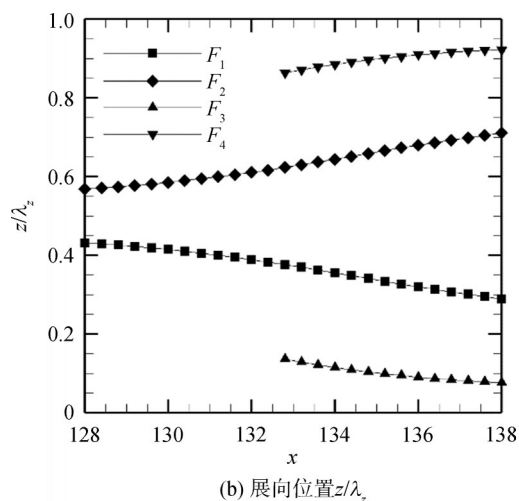
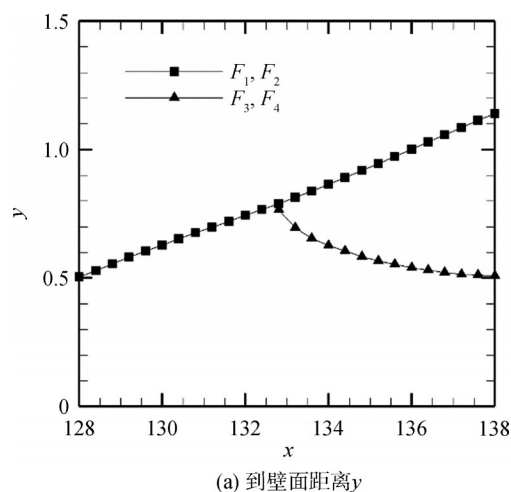


图 5 涡核位置的流向分布 (工况 1)

Fig.5 Streamwise distribution of vortex-core location (case 1)

附近的剖面给出,如图 6 与图 7 所示。可以发现,两种工况下的次生流向涡 F_3 、 F_4 最初生成时均为外旋涡,但在向下游发展过程中外旋趋势逐渐减弱,并以极限环的出现为标志转变为内旋涡。同时,主流向涡 F_1 、 F_2 在向下游演化的过程中也会出现极限环,但尚未出现内外旋反转,涡核附近始终为内旋。Wang 等^[23]在研究超声速角涡演化过程时对旋涡的 Hopf 分岔过程进行了分类,这里的主流向涡 F_1 、 F_2 与次生流向涡 F_3 、 F_4 均属于其中的 Type1。

2.2 流向涡的生成条件

流向涡作为涡轴沿着流向或接近流向的旋涡结构,在垂直于流向的 zy 截面上,其流线或速度矢量图应当具有旋转流动的特征。据此,提出了流向旋转流动的存在条件

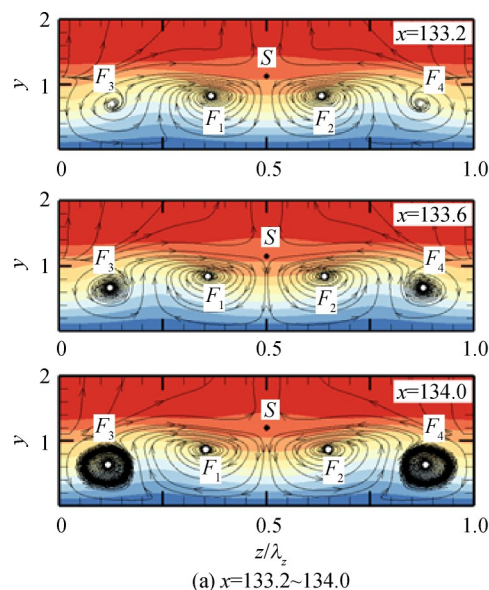
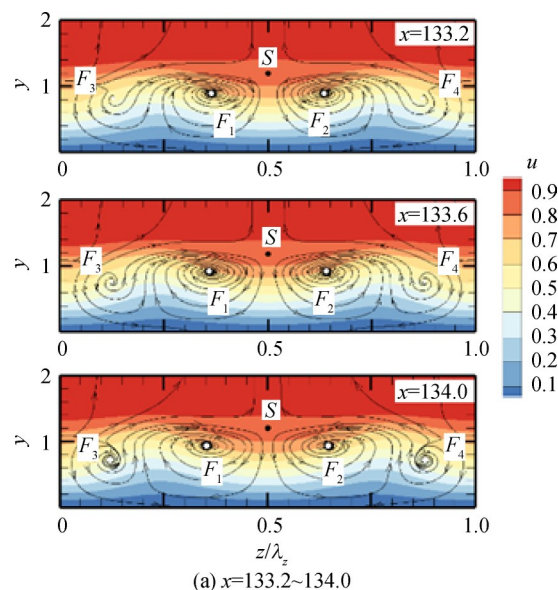
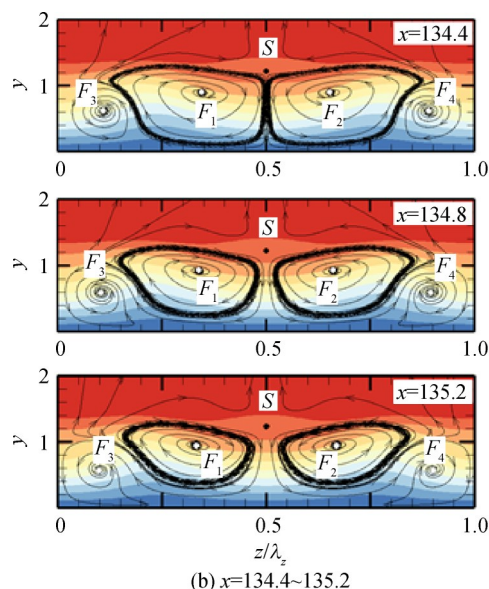
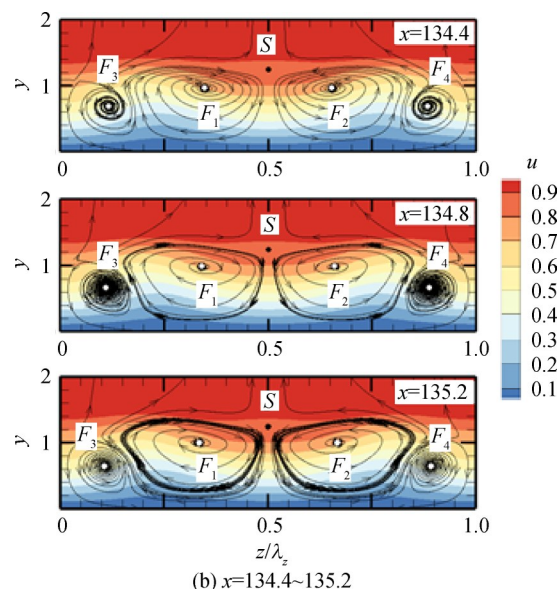
(a) $x=133.2\sim 134.0$ (a) $x=133.2\sim 134.0$ (b) $x=134.4\sim 135.2$ (b) $x=134.4\sim 135.2$

图6 工况1中次生流向涡的生成演化过程

Fig.6 Generation process of secondary streamwise vortex in case 1

图7 工况2中次生流向涡的生成演化过程

Fig.7 Generation process of secondary streamwise vortex in case 2

若流场内部存在至少一个点,满足

$$\begin{cases} w=v=0 \\ k<0 \end{cases} \quad (5)$$

其中 $k = \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 4 \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}$, 则在 zy 平面内存在流向旋转流动,该点即为旋转中心。

从物理意义上讲,式(5)中等式 $w=v=0$ 反映了旋转中心处线速度在 zy 截面内为零的特征,不等式 $k<0$ 则反映了旋转中心处的旋转特性。

为解释式(5)中 $k<0$ 的含义,首先将坐标系绕 x 轴逆时针旋转 θ 角,把 (z,y) 变换到 (Z,Y) , (w,v) 场随之转换到 (W,V) 场,旋转前后速度梯度张量 $\nabla(w,v)$ 与 $\nabla(W,V)$ 满足

$$\nabla(W,V) = R^T \nabla(w,v) R \quad (6)$$

其中

$$\nabla(W,V) = \begin{bmatrix} \frac{\partial W}{\partial Z} & \frac{\partial W}{\partial Y} \\ \frac{\partial V}{\partial Z} & \frac{\partial V}{\partial Y} \end{bmatrix},$$

$$\nabla(w, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

选择合适的 θ 角, 使得

$$\frac{\partial W}{\partial Z} = \frac{\partial V}{\partial Y} = s \quad (7)$$

此时, 速度梯度张量 $\nabla(w, v)$ 与 $\nabla(W, V)$ 的特征判别式分别为

$$\Delta_1 = \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 4 \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\Delta_2 = 4 \frac{\partial W}{\partial Y} \cdot \frac{\partial V}{\partial Z} \quad (8)$$

这里的 Δ_1 就是式(5)中的 k 。

由于 $R^T = R^{-1}$, 式(6)中 $\nabla(w, v)$ 到 $\nabla(W, V)$ 变换为相似变换, 根据矩阵在相似变换前后特征多项式不变的性质, $\Delta_1 = \Delta_2$, 于是 k 可表达为

$$k = 4 \frac{\partial W}{\partial Y} \cdot \frac{\partial V}{\partial Z} \quad (9)$$

下面利用式(9)对 $k < 0$ 的含义进行分析。如图 8 所示, 以满足 $W=V=0$ 的点为坐标原点 O , 在其邻域内坐标轴上取点 1、2、3、4, 其坐标分别为 $(\Delta Z, 0)$ 、 $(0, \Delta Y)$ 、 $(-\Delta Z, 0)$ 、 $(0, -\Delta Y)$, 速度分别为 (W_1, V_1) 、 (W_2, V_2) 、 (W_3, V_3) 、 (W_4, V_4) , 其中 $\Delta Z > 0, \Delta Y > 0$ 。由于 ΔZ 与 ΔY 足够小, 可假设在 $Z \in [-\Delta Z, \Delta Z], Y \in [-\Delta Y, \Delta Y]$ 范围内 (W, V) 关于 (Z, Y) 的偏导数各项均与原点处的取值相等, 于是有

$$\begin{cases} W_1 = \frac{\partial W}{\partial Z} \Delta Z = -W_3, V_1 = \frac{\partial V}{\partial Z} \Delta Z = -V_3 \\ W_2 = \frac{\partial W}{\partial Y} \Delta Y = -W_4, V_2 = \frac{\partial V}{\partial Y} \Delta Y = -V_4 \end{cases} \quad (10)$$

其中 W_1, V_2, W_3, V_4 均与 O 点共线, 不会引发旋转, 故先考虑 $W_1 = V_2 = W_3 = V_4 = 0$ 的情况

当 $k < 0$ 时, 根据式(9)与式(10)可得

$$\begin{cases} W_2 = -W_4 < 0 \\ V_1 = -V_3 > 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} W_2 = -W_4 > 0 \\ V_1 = -V_3 < 0 \end{cases} \quad (11)$$

如图 8(a)与图 8(b)所示, 此时 O 点附近存在旋转流动, O 点为中心点。(图 8(a)与图 8(b)中过点 1、3 的流线恰好经过点 2、4, 对应了 $\Delta Z =$

$\sqrt{\frac{\partial W}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial Z} \right)^{-1}} \Delta Y$ 的情况。)

当 $k > 0$ 时, 根据式(9)与式(10)可得

$$\begin{cases} W_2 = -W_4 > 0 \\ V_1 = -V_3 > 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} W_2 = -W_4 < 0 \\ V_1 = -V_3 < 0 \end{cases} \quad (12)$$

对应图 8(c)与图 8(d), 此时 O 点附近不存在旋转流动, O 点为鞍点。

当 $k=0$ 时, 若 $\frac{\partial W}{\partial Y}$ 与 $\frac{\partial V}{\partial Z}$ 不全为零, 根据式(9)与式(10)可得

$$W_2 = -W_4 = 0 \quad \text{或} \quad V_1 = -V_3 = 0 \quad (13)$$

对应图 8(e)~图 8(h), 同样不存在旋转流动。

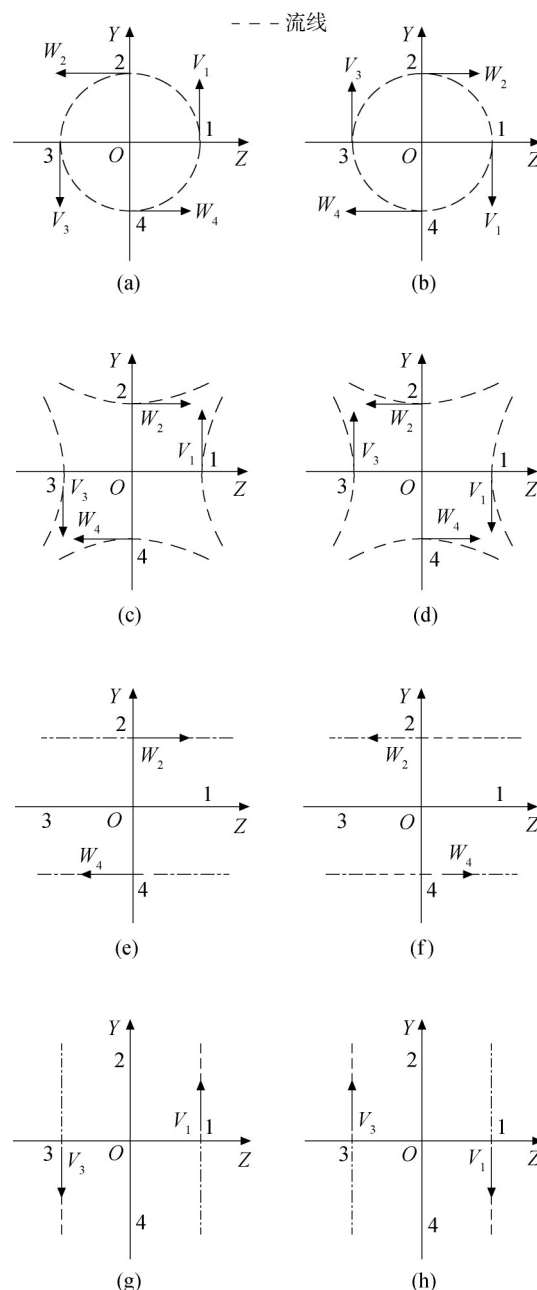


图 8 ZY 平面内零速度点附近的流动状态分类

Fig. 8 Classification of streamline topology around the zero velocity point in ZY plane

若 $\frac{\partial W}{\partial Y} = \frac{\partial V}{\partial Z} = 0$, 则根据式(10)可得: $V_1 = V_3 = W_2 = W_4 = 0$, 依然不存在旋转流动。

由于以上情况未考虑 W_1, V_2, W_3, V_4 , 下面考虑这些速度分量对旋转流动的影响。根据式(7)与式(10), 有

$$\begin{cases} W_1 = -W_3 = s\Delta Z \\ V_2 = -V_4 = s\Delta Y \end{cases} \quad (14)$$

当 $s=0$ 时, $W_1 = W_3 = V_2 = V_4 = 0$, 情况即为图8所示。当 $s>0$ 时, $W_1 = -W_3 > 0, V_2 = -V_4 > 0$, W_1, V_2, W_3, V_4 的方向均为远离 O 点, 当 $s<0$ 时, $W_1 = -W_3 < 0, V_2 = -V_4 < 0$, W_1, V_2, W_3, V_4 方向均指向 O 点, 在这两种条件下, 图8(a)与图8(b)中的旋转流动均会出现外旋($s>0$)或内旋($s<0$)的趋势, 旋转流动不会被破坏。而对于图8的其他情形, 由于 W_1, V_2, W_3, V_4 均经过 O 点, 依然不会有旋转流动出现。

根据以上分析, 在满足 $W_o = V_o = 0$ 的 O 点附近, $k<0$ 与存在旋转流动等价, 因此式(5)可视为 zy 平面内存在流向旋转流动的充要条件, 为了避免旋转矩阵的求解, 减少计算量, k 以原坐标系物理量表示即可。值得注意的是, 对于图8(e)~图8(h)所示情况, 涡量 ω_x 不为零, 对于图8(c)与图8(d)所示情况, 涡量 ω_x 可能不为零, 但这些情况下均无旋转流动。这说明涡量是否为零与旋转流动是否存在并不等价。另外, zy 平面内存在流向旋转流动, 是生成流向涡的一个必要条件, 而并非充分, 这是因为一般意义上的流向涡在流向的特征尺度比展向的特征尺度要大一个量级以上。为

有效组合出流向涡, 可在入口处选择展向波数比流向波数大一个量级左右的初始扰动。

为验证式(5), 取流向任意位置进行检验, (考虑到数值误差, 将式(5)中的 $k<0$ 改写为 $k<\epsilon<0$), 均得到了与流线图一致的结果。图9给出了工况1在 $x=134$ 处流向截面的流线与云图, 可以看到, zy 截面旋转流动中心 (F_1, F_2, F_3, F_4) 均满足式(5), 即 $w=v=0$ 且 $k<\epsilon<0$ (其中 ϵ 取 -1×10^{-8}), 而对于不存在旋转流动的区域, 同时满足 $w=v=0$ 与 $k<\epsilon<0$ 的点也不存在: 黑色圆点 S 处满足 $w=v=0$, 但 $k>0$, 而其他满足 $k<\epsilon<0$ 的区域不满足 $w=v=0$ 。

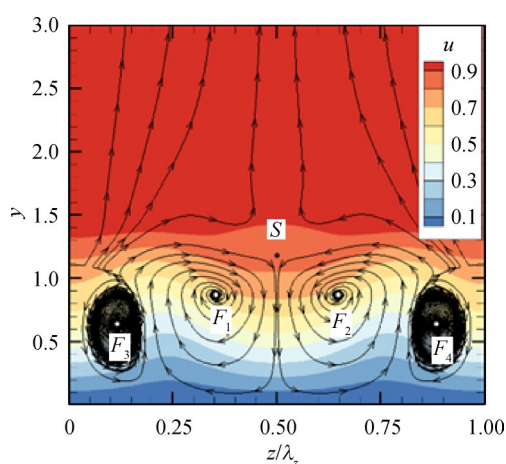
为验证 s 对内外旋趋势的作用, 给出工况1与工况2涡轴上的 s 分布曲线, 如图10所示。其中 s 由式(7)定义, 直接计算较为不便。根据相似变换前后矩阵迹不变的性质, 可以得到

$$\frac{\partial W}{\partial Z} + \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (15)$$

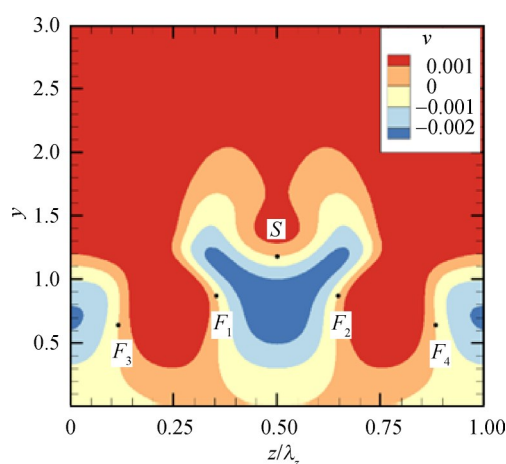
于是 s 可通过原坐标系的量表达, 即

$$s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (16)$$

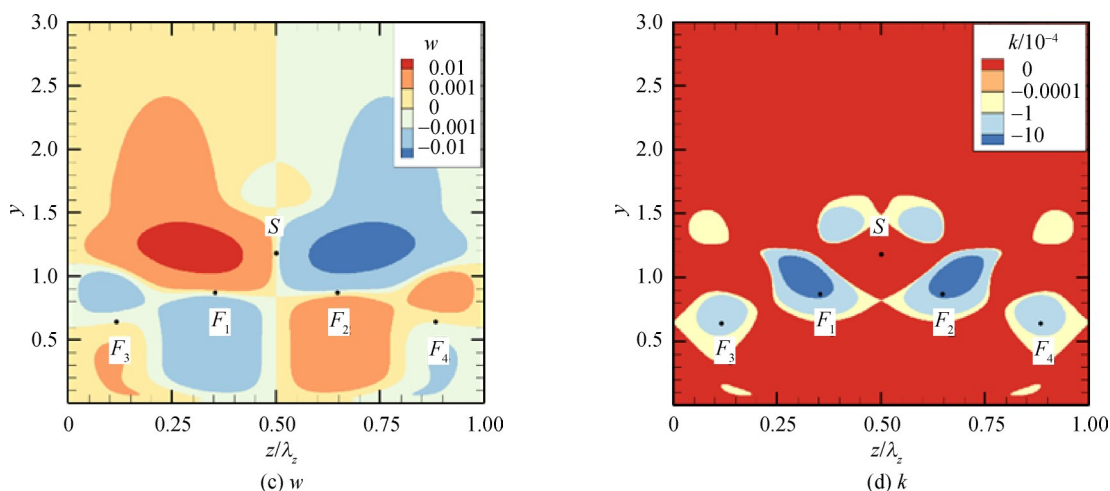
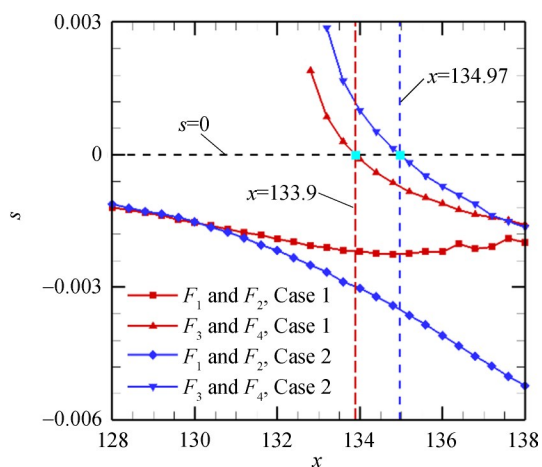
从图10中可以看到, 对于主流向涡 F_1, F_2 , 两种工况下 s 始终小于零, 图6、图7中的 F_1, F_2 处始终为内旋。而对于次生流向涡 F_3, F_4 , 两种工况下 s 均存在零点, 分别为 $x=133.9$ 与 134.97 , 这与图6、图7中 F_3, F_4 出现内外旋反转的位置一致, 在零点前的位置, $s>0$, 流线外旋, 而在零点后的位置, $s<0$, 流体内旋。以上结果验证了前文对 s 与内外旋关系的判断。



(a) wv 流线图



(b) v

图9 工况 1 在 $x=134$ 处的流线及 v, w, k 云图Fig.9 Contour v, w, k and streamlines at $x=134$ in case 1图 10 涡轴上 s 的分布Fig.10 Distribution of s on the vortex-core line

2.3 流向涡的生成机制

为了进一步解释流向涡的生成机制,本节考虑线性稳定性方程控制下的流动结构。当初始扰动为一对展向对称的斜波 $\omega=\omega_0, \beta=\pm\beta_0$ 时,根据式(2),同时考虑扰动特征函数沿流向的变化,此时流场中任意位置 (x, y, z) 处有

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_1 = \frac{1}{2} A_0 \hat{\varphi}_1(x, y) e^{i \left(\int_0^x a(\xi) d\xi + \beta_0 z - \omega t \right)} + \text{c.c.} \\ \tilde{\varphi}_2 = \frac{1}{2} A_0 \hat{\varphi}_2(x, y) e^{i \left(\int_0^x a(\xi) d\xi - \beta_0 z - \omega t \right)} + \text{c.c.} \end{cases} \quad (17)$$

将扰动与基本流线性叠加,总流速度的展向分量可写为

$$\begin{aligned} w &= w' + 0 = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 = \\ &-A(\hat{w}_{1r}(x, y) \sin \theta + \hat{w}_{1i}(x, y) \cos \theta) \sin(\beta_0 z) \end{aligned} \quad (18)$$

法向分量可写为

$$\begin{aligned} v &= v' + v_0 = \tilde{v}_1 + \tilde{v}_2 + v_0 = \\ &A(\hat{v}_{1r}(x, y) \cos \theta - \hat{v}_{1i}(x, y) \sin \theta) \cdot \\ &\cos(\beta_0 z) + v_0(x, y) \end{aligned} \quad (19)$$

其中

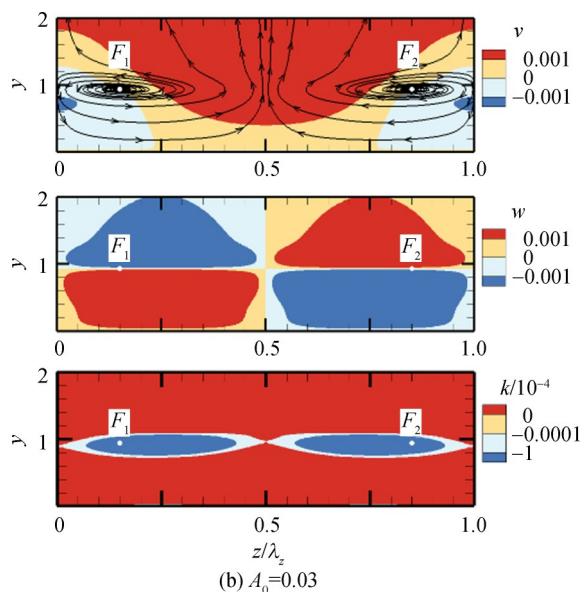
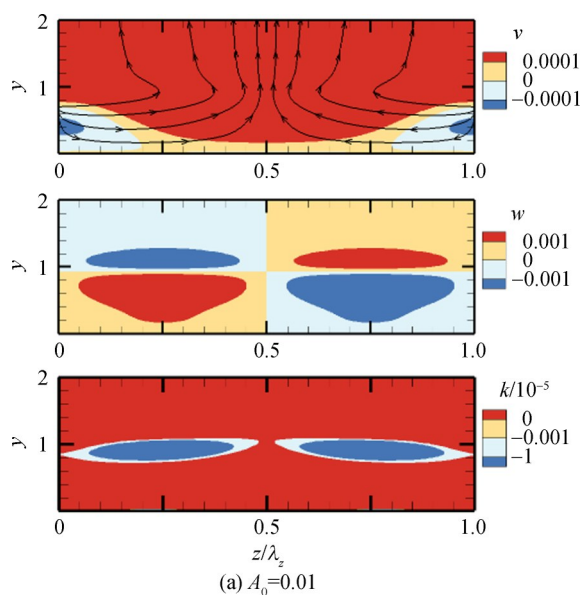
$$A = 2A_0 e^{-\int_0^x a(\xi) d\xi}, \quad \theta = \int_0^x \alpha_r(\xi) d\xi - \omega t \quad (20)$$

故任意流向位置处的特征剖面($\theta=0$)为

$$\begin{cases} w = -A \hat{w}_{1i}(x, y) \sin(\beta_0 z) \\ v = A \hat{v}_{1r}(x, y) \cos(\beta_0 z) + v_0(x, y) \end{cases} \quad (21)$$

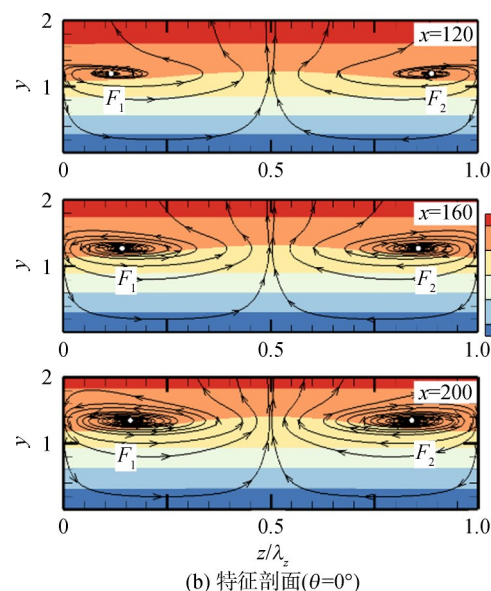
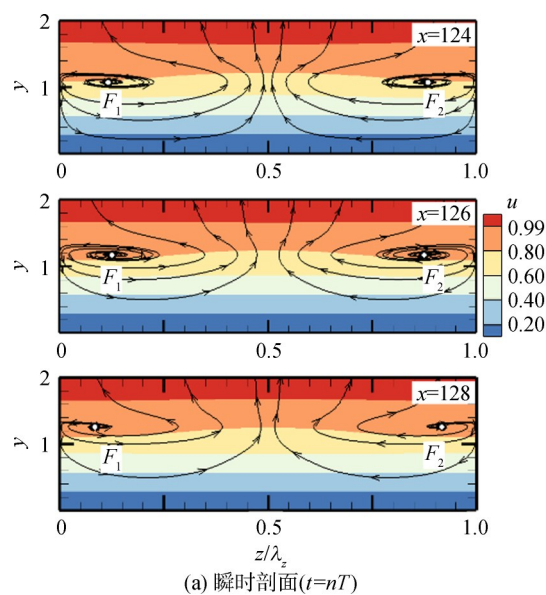
图 11 给出了一对斜波 $\omega=0.2, \beta=\pm 1.0$ 在 $A_0=0.01$ 与 $A_0=0.03$ 时 $x=0$ 处的特征剖面流线及 v, w, k 云图,在 $A_0=0.01$ 情况下无流向旋转流动而在 $A_0=0.03$ 情况下有流向旋转流动。这是由于基本流存在法向速度 v_0 , 为满足旋转流动中心 $v=0$ 的条件,扰动幅值需足够大。当幅值较小时,如图 11(a) 所示,尽管 $y=0.94$ 附近存在同时满足 $w=0$ 与 $k<0$ 的点,但均不满足 $v=0$ 的条件,导致式(5)不成立,因此流场中不存在流向旋转流动。当幅值较大时,如图 11(b) 所示,满足 $w=0$ 与 $k<0$ 的点中出现了 $v=0$ 的点,该点处式(5)成立,因此流场中存在以该点为中心的流向旋转流动。以上结果说明,只要初始幅值合适,一对展向对称的斜波与基本流叠加可以直接产生流向旋转流动。

对于不稳定的斜波,由于其沿下游演化时幅值 A 在不断增加,因此即使入口幅值 A_0 较小导致无法与基本流组合出流向旋转流动,在下游当 A 增到一定值时仍可与基本流组合出流向旋转流

图11 入口特征剖面流线及 v, w, k 云图Fig.11 Contour v, w, k and streamlines of eigen profile in the inlet

动。图12给出了入口扰动组合为一对 $A_0=0.01$ 的斜波 $\omega=0.2, \beta=\pm 1.0$ 时,总流在不同流向位置剖面的流线图。图12(a)为 $t=nT$ 时刻 $x=124, 126, 128$ 处的瞬时剖面,可以看到这些位置均存在以 F_1, F_2 为旋转中心的流向旋转流动,说明 $x=124\sim 128$ 之间叠加出了一对流向涡。图12(b)则是 $x=120, 160, 200$ 处满足 $\theta=0$ 的特征剖面(以相速度沿流向跟随涡运动看到的流场剖面),说明了叠加出的流向涡向下游传播时能始终维持。

因此当斜波的幅值满足一定条件时,其与基

图12 不同流向位置剖面流线图与速度 u 云图Fig.12 Streamlines and contour u at different locations in the streamwise direction

本流线性叠加即可生成流向涡,无需经过扰动波之间的非线性作用。

3 结 论

本文通过DNS,研究了马赫数为4.5的超声速平板边界层中,由入口第一模态不稳定波扰动组合演化生成流向涡的过程,发现一对展向对称的斜波可以演化生成流向涡,是否添加同幅值同频率的二维扰动波得到的流向涡结构差别不大。

基于 zy 截面的流动特征,提出了流向旋转流动生成的充分必要条件,并通过了DNS结果的验

证。同时发现一对展向对称的第一模态不稳定斜波在幅值满足一定条件下可通过与基本流叠加直接生成流向涡,非线性机制对于流向涡的生成不是必须的。

参考文献:

- [1] 张涵信,周恒.流体力学的基础研究[J].世界科技研究与发展,2001,23(1):15-18.
ZHANG Hanxin, ZHOU Heng. On basic research of fluid mechanics[J]. World Sci-Tech R & D, 2001, 23(1): 15-18. (in Chinese)
- [2] ROBINSON S K. Coherent motions in the turbulent boundary layer[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 1991, 23(1): 601-639.
- [3] HEAD M R, BANDYOPADHYAY P. New aspects of turbulent boundary-layer structure[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1981, 107: 297-338.
- [4] ACARLAR M S, SMITH C R. A study of hairpin vortices in a laminar boundary layer: Part I hairpin vortices generated by a hemisphere protuberance[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1987, 175: 1-41.
- [5] ACARLAR M S, SMITH C R. A study of hairpin vortices in a laminar boundary layer: Part II hairpin vortices generated by fluid injection[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1987, 175: 43-83.
- [6] LIAN Q X. A visual study of the coherent structure of the turbulent boundary layer in flow with adverse pressure gradient[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1990, 215: 101-124.
- [7] ROGERS M M, MOIN P. The structure of the vorticity field in homogeneous turbulent flows[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1987, 176: 33-66.
- [8] JEONG J, HUSSAIN F, SCHOPPA W, et al. Coherent structure near the wall in a turbulent channel flow[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1997, 332: 185-214.
- [9] 周恒,陆昌根,罗纪生.湍流边界层近壁区单个相干结构的模拟[J].中国科学:A辑,1999,29(4):366-372.
ZHOU Heng, LU Changgen, LUO Jisheng. Simulation of single coherent structure near the wall in a turbulent boundary layer[J]. Science in China: Series A, 1999, 29(4): 366-372. (in Chinese)
- [10] ZHOU J, ADRIAN R J, BALACHANDAR S, et al. Mechanisms for generating coherent packets of hairpin vortices in channel flow[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1999, 387: 353-396.
- [11] SCHOPPA W, HUSSAIN F. Coherent structure generation in near-wall turbulence[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2002, 453: 57-108.
- [12] PIROZZOLI S, BERNARDINI M, GRASSO F. Characterization of coherent vortical structures in a supersonic turbulent boundary layer[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2008, 613: 205-231.
- [13] 陈林,唐登斌,刘超群.转捩边界层中次生流向涡演化的数值研究[J].应用数学和力学,2011,32(4):428-436.
CHEN Lin, TANG Dengbin, LIU Chaoqun. Numerical studies on evolution of secondary streamwise vortices in transitional boundary layers[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2011, 32(4): 428-436. (in Chinese)
- [14] SAYADI T, HAMMAN C W, MOIN P. Direct numerical simulation of complete H-type and K-type transitions with implications for the dynamics of turbulent boundary layers[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2013, 724: 480-509.
- [15] ZHAO Y, LEI C, PATTERSON J C. The K-type and H-type transitions of natural convection boundary layers[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2017, 824: 352-387.
- [16] 李玲玉,刘建新.高超声速边界层基频二次失稳条纹结构的稳定性研究[EB/OL]. [2021-04-10]. <https://kns.cnki.net/kcms/detail/51.1192.TK.20210310.1531.004.html>
- [17] HUANG Z, ZHOU H, LUO J. Direct numerical simulation of a supersonic turbulent boundary layer on a flat plate and its analysis[J]. Science in China: Series G, 2005, 48(5): 626-640.
- [18] JEONG J, HUSSAIN F. On the identification of a vortex[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1995, 285: 69-94.
- [19] HUNT J, WRAY A A, EDDIES MOIN P., streams, and convergence zones in turbulent flows[R]. Center for Turbulence Research Report, CTR-S88, 1988.
- [20] LIU C, WANG Y, YANG Y, et al. New omega vortex identification method[J]. Science China Physics, Mechanics and Astronomy, 2016, 59(8): 684711.1-684711.9.
- [21] LIU C, GAO Y, TIAN S, et al. Rortex: a new vortex vector definition and vorticity tensor and vector decompositions[J]. Physics of Fluids, 2018, 30(3): 035103.1-035103.25.
- [22] LIU C, LIU J. Modified normalized rortex/vortex identification method[J]. Physics of Fluids, 2019, 31(6): 061704.1-061704.8.
- [23] WANG Z, CHANG J, ZHANG J, et al. Evolution of subsonic and supersonic corner vortices in a supersonic cascade[J]. Aerospace Science and Technology, 2019, 95(10): 105509.1-105509.58.

(编辑:王碧珺)